MATEMÁTICA DISCRETA

Tema GRAFOS

Introducción

ÍNDICE

1. **INTRODUCCIÓN A LOS GRAFOS.**
   - Euler y los puentes de Könisberg.
   - Definiciones y terminología.
     - Grafo, multigrafo, pseudografo, grafo dirigido y con peso, etc.
     - Familias particulares de grafos.
     - Subgrafos. Grado de un vértice. Teorema de Euler.
   - Isomorfismo de grafos.

2. **CONECTIVIDAD.**
   - Recorridos y caminos.
   - Grafos conexos.
   - Grafos eulerianos.
   - Grafos hamiltonianos.
   - Árboles.
   - Árboles recubridores.

3. **GRAFOS PONDERADOS.**
   - Árboles recubridores mínimos. **Algoritmo de Kruskal.**
   - Caminos mínimos. Centro y mediana.
   - **Algoritmo de Dijkstra.**

4. **DIGRAFOS ACÍCLICOS.** **(RELACIONES BINARIAS)**
   - Preorden. Cierres. **Diagramas de Hasse.**
   - Orden topológico.
   - **Planificación de tareas.**

BIBLIOGRAFÍA

- **[1] MATEMÁTICA DISCRETA, (2ª edición), "Notas de la asignatura" editadas por el Servicio de Publicaciones de la E.U. de Informática.**

- **[2] GRIMALDI, R.P.: *"Matemática Discreta y Combinatoria"*. Addison Wesley, 1997.**

- **[4] ROSEN, K.H.: *"Matemática Discreta y sus aplicaciones"*. McGraw-Hill, 2004.**

- **[1-Complementaria] BRADLEY, J.: *"Introduction to Discrete Mathematics"*. Addison Wesley, 1988.**

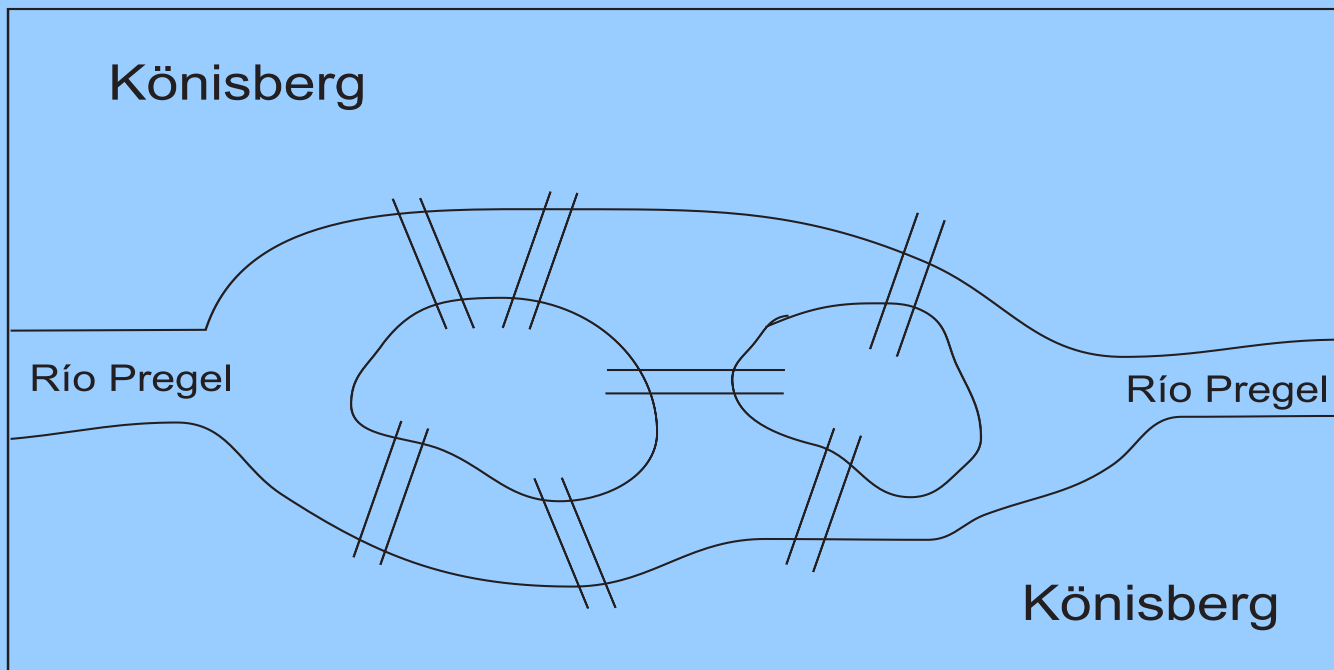
Introducción a los grafos.

- **Euler y los puentes de Könisberg.**
  - Formulación del problema.
  - Modelización.
  - Generalización.
- **Utilidad de los grafos.**
  - Modelización y resolución de problemas.
  - Representación de la información.
  - Estructura de datos.
- **Aplicación de los grafos.**
  - Matemáticas.
  - Informática.
  - Otras ciencias: geografía, biología, ecología, economía, etc.
  - Otras artes: música, lingüística, literatura, etc.

Relaciones del tema con otras asignaturas

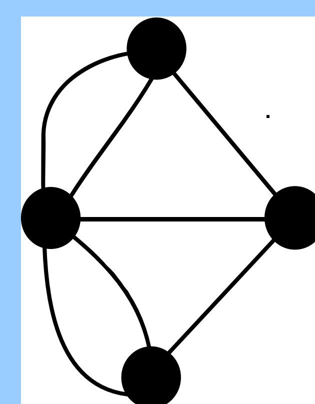
- **Con la mayoría de las de matemáticas**
  - **Matemática Discreta.**
    - Árboles estructurales, tableaux, árboles de dependencia.
  - **Lógica.**
- **Con bastantes de informática**
  - **Estructuras de Datos I y II.**
  - **Algorítmica.**
  - **Ingeniería del Software.**
  - **Inteligencia Artificial.**

Euler (1707-1783) y los puentes de Könisberg



Modelización:

Con una estructura discreta, finita: un **grafo.**



Inicio de la teoría de grafos

- **Generalización:**
  - **GRAFO:** Conjunto de vértices y aristas.
  - Recorrido euleriano.
  - TEOREMA (de Euler): Dado un grafo conexo es euleriano si y solo si todos los vértices tienen grado par.
  - El problema de los puentes de Könisberg no tenía solución.
- **Inicio de la teoría de grafos (1736)**
  - En muchos problemas de apariencia dispar, subyace esta misma **estructura discreta.**
- **Objetivo:**
  - **Aprender a modelizar con grafos.**
  - **Resolver problemas con grafos.**

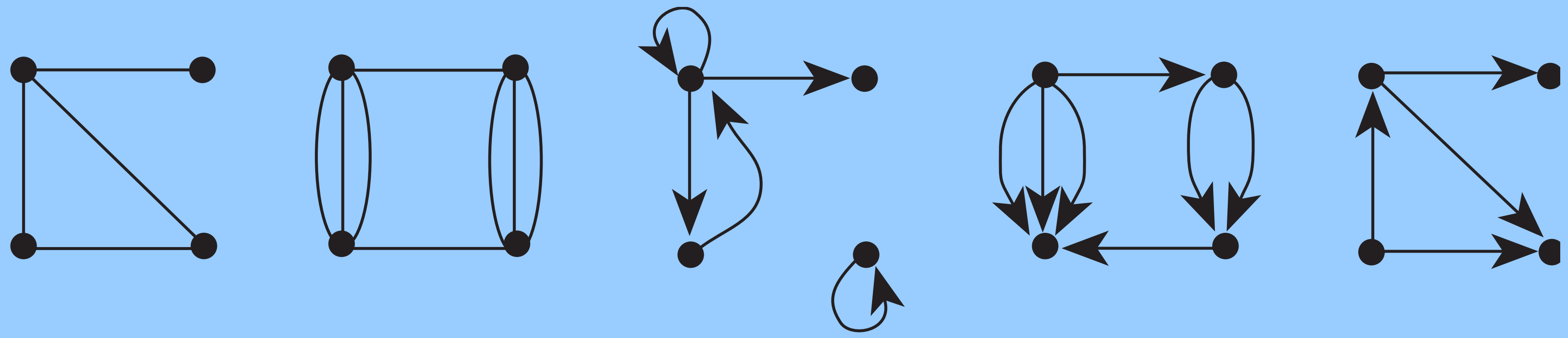
Definiciones y terminología.

- **Definición Intuitiva de grafo:**

  Un grafo es un conjunto de puntos, vértices o nodos, unidos por líneas, aristas.

No hay restricciones para formar un grafo:

- Puede haber varias aristas entre dos vértices.
- El vértice de partida y el de llegada puede ser el mismo.
- Las aristas pueden o no llevar flechas.



Definición: Grafo Simple o Grafo Simple No Dirigido.

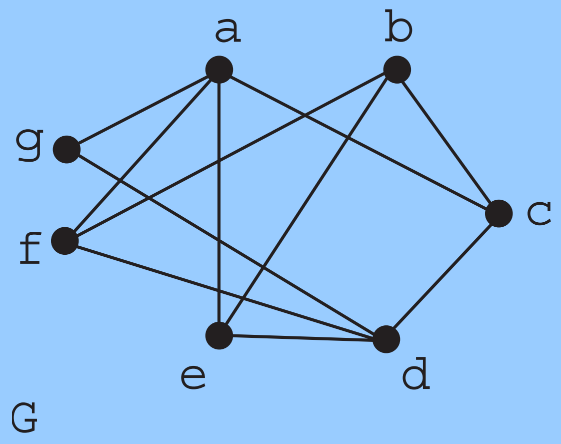
Un **grafo (o grafo simple o grafo simple no dirigido)** es un par **G = (V,A)** donde **V** es un **conjunto finito no vacío** y **A** es un **conjunto de pares NO ordenados {u,v} de elementos distintos de V.**

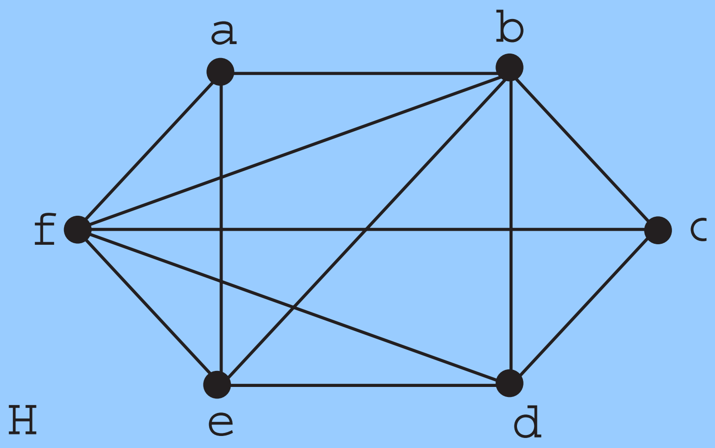
- Los elementos de **V** se denominan **vértices**.
- Los elementos de **A** se denominan **aristas.**

Notación: **{u,v}** se escribe **uv** o bien **vu**, o bien ***u ady v***.

- Si **uv** es una arista, **uv**$\in$**A**, se dice que:
  - Los vértices **u** y **v** son **ADYACENTES**, en la arista **uv**.
  - **u** y **v** son **INCIDENTES** con la arista **uv**.
  - **u** y **v** son los **EXTREMOS** de **uv**.
  - La arista **uv** es **INCIDENTE** con los vértices **u** y **v**.
  - Dos aristas son **ADYACENTES** si tienen un extremo común.

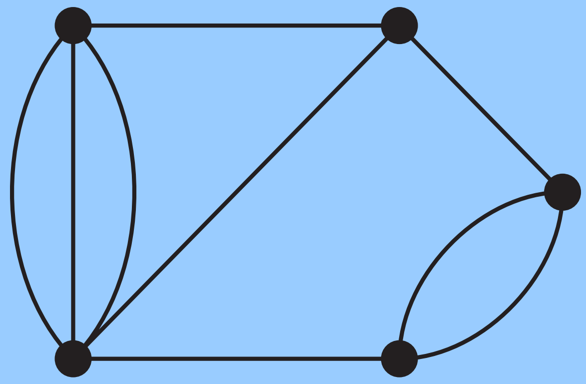
Ejemplos de grafos



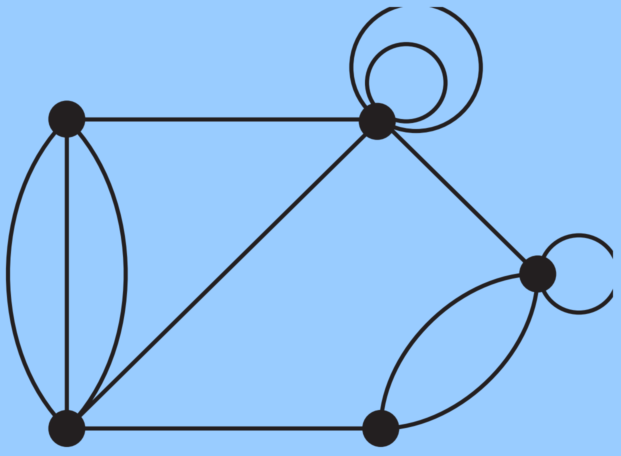


Nota: en un **grafo simple** NO hay aristas orientadas, ni bucles, ni dos o más aristas entre un mismo par de vértices.

- Si **sí** se permiten **aristas múltiples**.
- Si además se permiten **bucles**.



Multigrafo



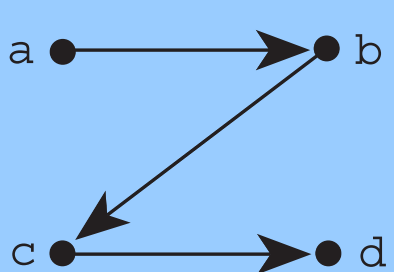
Pseudografo

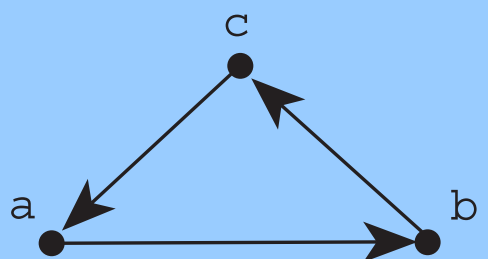
Definición: Grafo (Simple) Dirigido.

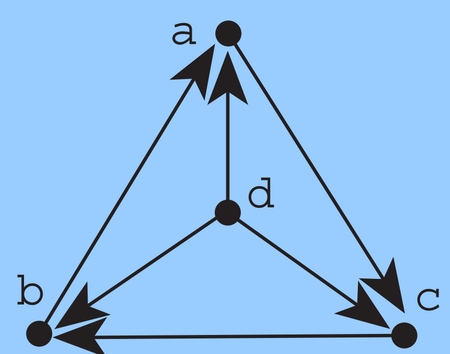
- Un **grafo dirigido (o grafo simple dirigido)** es un par **$G = (V,A)$** donde **V** es un **conjunto finito no vacío** y **A** es un **conjunto de pares ordenados de vértices distintos** de **V**, tal que si el par **$(u,v) \in A$** **entonces** **$(u,v) \notin A$** .

- Si **$(u,v) \in A$** es una **arista dirigida,** diremos que **u** y **v** son sus **vértices inicial y final.**

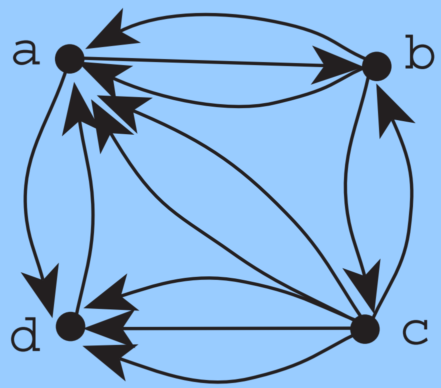
- **Ejemplos:**

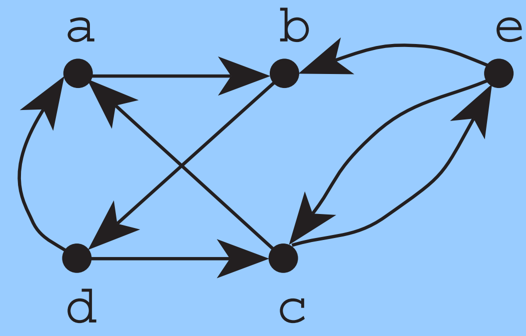




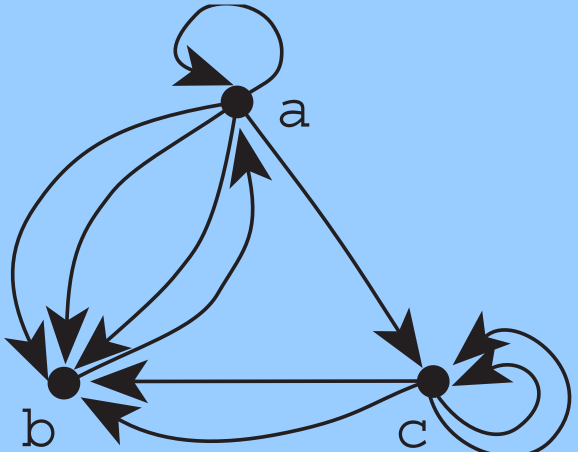


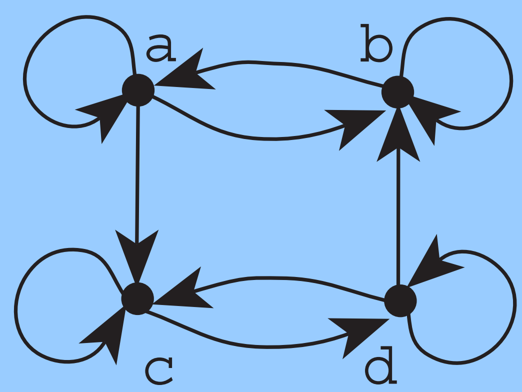
- **Multigrafos dirigidos:**

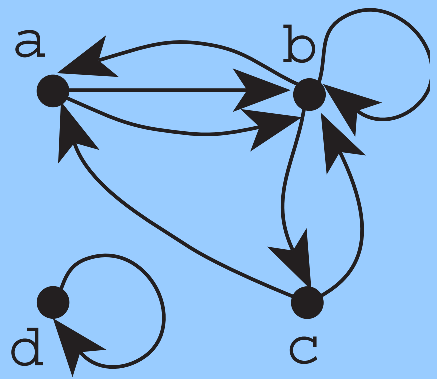




- **Pseudografos dirigidos:**







Definición: Digrafo.

- Un **digrafo** es un **pseudografo dirigido** donde se permite a lo sumo un bucle por vértice y dos aristas entre dos vértices distintos con la condición de que tengan orientaciones opuestas.
- Con esta definición cada digrafo **G = (V, A)** se corresponde con una única relación binaria **A** en **V** y recíprocamente.
- **Ejemplo:** **V={ a, b, c, d }** y consideremos la relación binaria **R** en **V:**

R={ (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,b), (d,c), (d,d) }

entonces el digrafo **G** asociado tiene a **V**

como conjunto de vértices y las aristas

dirigidas son los pares de **R**: **G = (V, R)**